1.2. Phép tính vi phân hàm phức

1.2.1. Đạo hàm, vi phân của hàm phức

a) Định nghĩa đạo hàm

Giả sử hàm *f*(z) xác định trong một lân cận của điểm z_0. Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm *f*(z) tại điểm z_0 và được ký hiệu là: $f'(z_0)$ hay $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Từ định nghĩa trên ta suy ra

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}. \qquad (1.2)$$

Nếu đặt $h = z - z_0$ thì (1.2) được viết lại là $f'(z_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$.

Chú ý:

Từ (1.2) ta có công thức tính đạo hàm của hàm *f*(z) tại một điểm $z\in D$ là $f'(z)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$.

Hệ quả 1.1. Giả sử *f*(z) là một hàm thực biến phức (tức là $f(z)\in\mathbb{R}, \forall z\in\mathbb{C}$). Khi đó, nếu hàm *f*(z) có đạo hàm tại z_0 thì $f'(z_0) = 0$.

b) Định nghĩa vi phân

Hàm phức *f*(z) được gọi là khả vi tại điểm z_0 nếu nó xác định trong một lân cận của điểm z_0 và số gia của hàm tại z_0 có thể biểu diễn được dưới dạng:

$$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A.\Delta z + \theta\Delta z.$$

Trong đó, $\theta\Delta z$ là vô cùng bé bậc cao hơn so Δz. Khi đó, biểu thức $A.\Delta z$ được gọi là vi phân của hàm *f*(z) tại điểm z_0, ký hiệu là $df(z_0) = A.\Delta z$.

Mệnh đề 1.1. Hàm *f*(z) khả vi tại điểm z_0 khi và chỉ khi *f*(z) có đạo hàm tại z_0.

Khi đó, ta có $df(z_0) = f'(z_0)\Delta z$, xét vi phân của hàm *f*(z) = z ta thấy $df(z_0) = dz=\Delta z$ và vì thế công thức vi phân tại điểm z_0 là: $df(z_0) = f'(z_0)dz$, còn tại một điểm z bất kỳ sẽ là $df(z) = f'(z)dz$.

Mệnh đề 1.2. Nếu *f*(z) khả vi tại z_0 thì cũng liên tục tại z_0. Điều ngược lại cơ bản là không đúng.

1.2.2. Điều kiện khả vi

Định lý 1.2 (Định lý Cauchy-Riemann)

Cho hàm phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$. Hàm *f*(z) được gọi là khả vi tại điểm $z_0 = x_0 + iy_0$ khi và chỉ khi các hàm *u(x,y)*, *v*(*x*,*y*) khả vi tại (x_0,y_0) và thỏa mãn điều kiện sau (gọi là điều kiện Cauchy-Riemman, viết tắt là điều kiện C-R):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0);\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Khi đó, ta có $f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Ví dụ 1.4. Cho hàm $f(z) = x^4 + xy + iy^4$. Tìm tất cả các điểm khả vi và tính $f'(z)$ tại những điểm ấy (nếu có).

Giải:

Ta có, $u = x^4 + xy$, $v = y^4 \Rightarrow u'_x = 4x^3 + y$; $u'_y = x$; $v'_x = 0$; $v'_y = 4y^3$.
Rõ ràng các hàm u, v khả vi tại mọi điểm (x,y). Ngoài ra, ta có điều kiện C-R $\Leftrightarrow$
$\begin{cases} 4x^2 + y = 4y^3 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0; y = \pm\frac{1}{2} \end{array} \right.$.

Vậy, có 3 điểm khả vi của $f(z)$ là $z_1(0,0)$, $z_2(0,-\frac{1}{2})$, $z_3(0,\frac{1}{2})$. Khi đó, đạo hàm tại các điểm này lần lượt là $f'(z_1) = 0$, $f'(z_2) = -\frac{1}{2}$, $f'(z_3) = \frac{1}{2}$.

Mệnh đề 1.2. Điều kiện C-R $\Leftrightarrow$ điều kiện $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

1.2.3. Một số hàm phức cơ bản và đạo hàm của nó

TT	Hàm	Đạo hàm	TT	Hàm	Đạo hàm
1	$f(z) = C$	$f'(z) = 0$	5	$f(z) = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$	$f'(z) = -\sin z$
2	$f(z) = z^n$	$f'(z) = nz^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$	6	$f(z) = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$	$f'(z) = \cos z$.
3	$f(z) = e^z$	$f'(z) = e^z$	7	$f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$	$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 x}$
4	$f(z) = \ln z$	$f'(z) = \frac{1}{z}$	8	$f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$	$f'(z) = -\frac{1}{\sin^2 z}$

1.2.4. Các công thức đạo hàm cơ bản

Các định lý về đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương,... hàm hợp, hàm ngược được xác định tương tự như đối với các định lý tương ứng của hàm một biến số thực đã biết.

1.2.5. Hàm giải tích

a) Định nghĩa 1.3

Hàm $f(z)$ được gọi là giải tích hay chỉnh hình tại z_0 nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc một lân cận nào đó của z_0.

Nếu $f(z)$ giải tích tại mọi điểm $z \in D$ mở, liên thông thì ta nói nó giải tích trên miền D.

Nhận xét:

Nếu $f(z)$ khả vi tại mọi điểm $z \in D$ mở, liên thông thì $f(z)$ giải tích trên miền D.
Điều kiện giải tích đòi hỏi chặt chẽ hơn rất nhiều so với tính khả vi của hàm.

Ví dụ 1.5. Xét tính khả vi, giải tích của hàm $f(z) = x^2 + y^2$.

Giải:

Ta có, $f(z) = z.\bar{z}$ suy ra $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z = 0 \Leftrightarrow z = 0$, vậy $f(z)$ chỉ khả vi tại duy nhất một điểm $z = 0$ và như thế hàm này không giải tích tại bất cứ điểm nào trong $\mathbb{C}$.

b) Ý nghĩa hình học, tính bảo giác của hàm giải tích

Xét hàm $f(z)$ khả vi tại z_0 và có $|f(z_0)| \neq 0$, $z_0 \in D$.

Giả sử z_1, $z_0 \in (L_1)$, $z_1 \to z_0$ dọc (γ_1) thì khi đó $f(z_1)$, $f(z_0) \in f(L_1)$ và $f(z_1) \to f(z_0)$ dọc $f(\gamma_1)$. Do $f(z)$ khả vi tại z_0 nên ta có: $f'(z_0) = \lim\limits_{z_1 \to z_0} \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}$

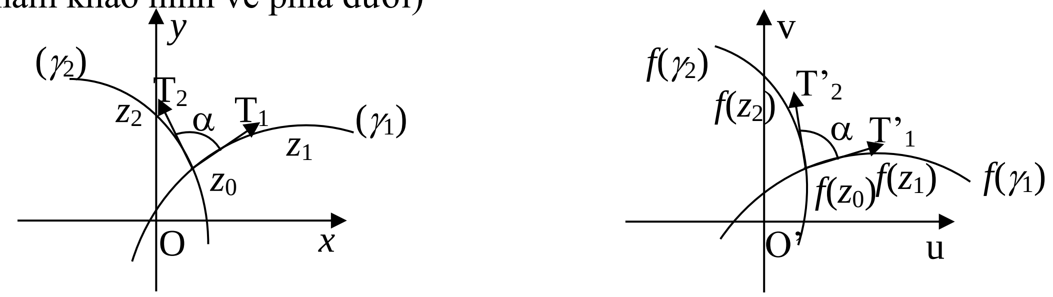
$\Rightarrow \arg f'(z) = (O'u; w_0T'_1) - (Ox; z_0T_1)$. *(a)*

Giả sử z_2, $z_0 \in (L_2)$, $z_2 \to z_0$ dọc (L_2) thì khi đó $f(z_2)$, $f(z_0) \in f(\gamma_2)$ và $f(z_2) \to f(z_0)$ dọc $f(\gamma_2)$. Tương tự trên ta có:

$$\arg f'(z) = (O'u,\ w_0T'_2) - (Ox,\ z_0T_2). \qquad (b)$$

Từ *(a)* và *(b)* suy ra $(w_0T'_1, w_0T'_2) = (z_0T_1, z_0T_2) = \alpha$ điều này đã chứng tỏ rằng góc giữa 2 đường cong (γ_1) và (γ_2) đi qua z_0 được bảo toàn qua phép biến hình $w = f(z)$.

Tóm lại, nếu $f(z)$ giải tích trên D thì tại mọi điểm $z \in D$ góc giữa 2 đường cong bất kỳ qua z được bảo toàn (còn gọi là tính bảo giác) qua phép biến hình $w = f(z)$ (xem tham khảo hình vẽ phía dưới)



Hình 1.2

1.2.6. Hàm điều hoà, quan hệ giữa hàm giải tích và hàm điều hoà

a) Định nghĩa 1.4

Hàm 2 biến $u(x, y)$ được gọi là hàm điều hòa nếu nó có đạo hàm riêng đến cấp 2 và thỏa mãn phương trình Laplace: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

b) Quan hệ giữa hàm giải tích và hàm điều hoà

Giả sử *u, v* là 2 hàm điều hòa thoả mãn điều kiện C-R. Khi đó, *u* và *v* được gọi là cặp hàm *điều hòa liên hợp* hay nói hàm *v* là *liên hợp* với hàm *u*.

Định lý 1.3. Giả sử *u, v* là cặp hàm điều hòa. Khi đó hàm phức $f(z) = u + iv$ là hàm giải tích khi và chỉ khi cặp hàm *u, v* là liên hợp.

Giả sử *u* là một hàm điều hoà trong miền *D* đơn liên. Khi đó hàm *v* liên hợp với hàm *u* xác định bởi công thức sau:

$$v(x;y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x;y_0)dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x;y)dy + C. \qquad (1.3)$$

Trong đó, $(x_0, y_0) \in D$ là điểm bất kỳ và *C* là hằng số tuỳ ý.

Ví dụ 1.6. Cho hàm $u = x^2 - y^2$. Tìm hàm giải tích $f(z)$.

Giải:

Theo công thức (1.3) ta có hàm liên hợp

$$v(x;y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x;y_0)dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x;y)dy + C.$$

$$v(x;y) = 2\int_{x_0}^{x} y_0 dx + 2\int_{y_0}^{y} x dy + C = 2y_0(x - x_0) + 2x(y - y_0) + C$$

$v(x;y) = 2xy - 2x_0y_0 + C$. Vậy hàm *f* giải tích cần tìm là: $f(z) = (x^2 - y^2) + i2xy$ (chọn x_0, y_0, C sao cho $2x_0y_0 + C = 0$).